Calcul symbolique avec MAPLE

Jérémy CHAMBOREDON

2009-2010

Université de Caen - Basse-Normandie

Table des matières

1 Introduction à MAPLE

1.1 Généralités

MAPLE est un logiciel de calcul formel qui fournit une aide au calcul mathématique, à la représentation des fonctions, etc. Une feuille de calcul MAPLE se présente par une suite d'invites de commandes [**STUDENT >** et de lignes de texte commençant par [. Il est possible de créer de nouvelles lignes de texte ou de commande en cliquant sur les boutons appropriés dans la barre d'outils. Les lignes de commande se terminent par un symbole point-virgule (;) ou deux points (:).

Exemples :
[Ceci est une ligne de texte.
[**STUDENT >** `Ceci*est*une*ligne*de*commande!*Il*faut*mettre*des*opérateurs*et*un*point-virgule!;`

$$\mathit{Ceci\ est\ une\ ligne\ de\ commande!\ Il\ faut\ mettre\ des\ opérateurs\ et\ un\ point} - \mathit{virgule!}$$

Remarque. La suite de commandes de la feuille de calculs en cours ne s'exécute pas forcément linéairement (dans l'ordre où elles apparaissent). Ainsi l'exécution d'une commande située sous une autre peut avoir des effets sur une exécution ultérieure de la commande précédente. Pour exécuter toutes les commandes dans l'ordre, on peut avoir recours à la commande «execute worksheet».

Le logiciel MAPLE attribue différents types aux objets qu'il étudie :

Booléen : un *booléen* peut prendre uniquement la valeur *true* (vrai) ou *false* (faux) ; il permet de faire des tests.

Exemples :
[**STUDENT >** `type(false,boolean); type(a=b,boolean);`

$$\mathit{true}$$
$$\mathit{true}$$

Constante : il peut s'agir d'un nombre, d'une constante mathématique (ex. π)...

Exemples :
[**STUDENT >** `type(4,constant); type(Pi,constant); type(x,constant);`

$$\mathit{true}$$
$$\mathit{true}$$
$$\mathit{false}$$

Variable : il s'agit d'une lettre ou d'un groupe de lettres à qui on peut attribuer une valeur, conservée jusqu'à remplacement ou effacement. On peut affecter une valeur à une variable grâce au symbole « :=». Pour supprimer la valeur de la variable *var*, il faut lui affecter *'var'*. On peut aussi réinitialiser toutes les variables à l'aide de la commande *restart*.

Exemples :
[**STUDENT >** `a; a:=2; a; b:=a; a:='a'; a+b;`

$$a$$
$$a := 2$$
$$2$$
$$b := 2$$
$$a := a$$
$$a + 2$$

Expression : il s'agit d'une expression mathématique comprennant des variables.

Exemples :
```
[ STUDENT > P :=x**2+3*x-6;P;A :=B*H/2;A;
```
$$P := x^2 + 3x - 6$$
$$x^2 + 3x - 6$$
$$A := \frac{1}{2}BH$$
$$\frac{1}{2}BH$$

Fonction : il s'agit d'un objet associant une image à une ou plusieurs valeurs d'entrée. MAPLE comprend naturellement un certain nombre de fonctions de base, mais il est possible d'en créer de nouvelles.

Exemples :
```
[ STUDENT > f :=x->(exp(x)-1)/x-x**2/2; f(1);
```
$$f := x \to \frac{e^x - 1}{x} - \frac{1}{2}x^2$$
$$e - \frac{3}{2}$$

Procédure : une procédure est un programme informatique qui permet d'effectuer différents calculs sur des paramètres. Elle renvoie en principe le dernier calcul effectué.

Exemple :
```
[ STUDENT > sommeNpremiers :=proc(N)
[ STUDENT > local S,i,p;
[ STUDENT > S :=0;p :=0;i :=1;
[ STUDENT > while i<= N do
[ STUDENT > if isprime(p) then
[ STUDENT > S :=S+p;i :=i+1;
[ STUDENT > fi;
[ STUDENT > p :=p+1;
[ STUDENT > od;
[ STUDENT > S;
[ STUDENT > end :
[ STUDENT > sommeNpremiers(100);
```
$$24133$$

1.2 Commandes et fonctions utiles

Commentaires : on peut insérer à tout moment des commentaires après le symbole '#'.

Exemple :
```
[ STUDENT > # Ceci est un commentaire
```

Aide : on peut facilement obtenir de l'aide à propos d'une fonction f en entrant la commande « ?f ;» ; l'aide comprend la syntaxe de la fonction en question, ainsi que de nombreux exemples.

Exemple :
```
[ STUDENT > ?isprime; (affiche l'aide de la fonction isprime)
```

Symboles d'opérateurs : + − * / ** ou ^ ! ...

Exemples :

```
[ STUDENT > 2+3; 5**9; 9!;
```

$$5$$
$$1953125$$
$$362880$$

Simplification d'expressions : eval, evalf, simplify, expand...

Exemples :

```
[ STUDENT > expand((x+y)**2);
```

$$x^2 + 2xy + y^2$$

Constantes : le plus souvent avec une majuscule : Pi, I, infinity...

Exemples :

```
[ STUDENT > Pi; evalf(Pi); pi; evalf(pi); 3*I+1;
```

$$\pi$$
$$3.141592654$$
$$\pi$$
$$\pi$$
$$1 + 3I$$

Fonctions mathématiques usuelles : abs, sqrt, sin, cos, tan, ln, exp...

Exemples :

```
[ STUDENT > sin(Pi); sqrt(2); ln(1); exp(1);
```

$$0$$
$$\sqrt{2}$$
$$0$$
$$e$$

Opérateurs mathématiques : solve, limit, diff, int, sum, product...

Exemples :

```
[ STUDENT > solve(x**4-1=0,x);limit(sin(x)/x,x=0);
```

$$1, -1, I, -I$$
$$1$$

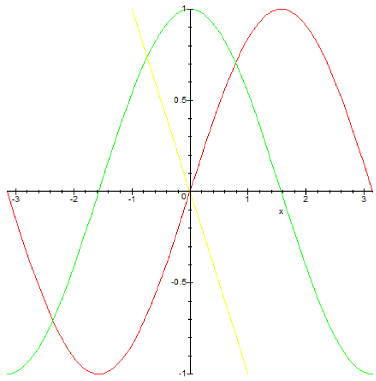
```
[ STUDENT > int(ln(x),x);sum(k,k=0..n);
```

$$x\ln(x) - x$$
$$\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

Outils graphiques : plot, plot3d...

Exemple :

```
[ STUDENT > plot({sin(x),cos(x),-x},x=-Pi..Pi,-1..1);
```



1.3 Procédures et programmation

Une procédure MAPLE est une suite de commandes et de blocs (si, pour, tant que...). Elle prend en arguments des paramètres à indiquer lors de l'exécution.

Bloc procédure : Une procédure est un bloc commençant par proc(a_1,...,a_k) et se terminant par end. Elle comprend des commandes MAPLE de base ainsi que différents blocs (tests, boucles...).

Exemple :

```
[ STUDENT > proceduretype :=proc(a,b)   (début du bloc)
[ STUDENT > a+b;   (commandes de la procédure)
[ STUDENT > end :   (fin du bloc)
```

Bloc si : Un bloc *'si'* permet de n'effectuer des commandes que si certaines conditions sont effectuées. Il comprend un test (booléen), la suite de commandes à effectuer en cas de test positif, puis les commandes à effectuer dans le cas contraire.

Exemple :

```
[ STUDENT > if condition1 then   (début du bloc, on teste condition1)
[ STUDENT > commandes;   (suite de commandes à effectuer lorsque condition1 est vérifié)
[ STUDENT > else if condition2 then   (sinon, on teste condition2)
[ STUDENT > commandes;   (suite de commandes à effectuer lorsque condition2 est vérifié)
[ STUDENT > else   (sinon)
[ STUDENT > commandes;   (suite de commandes à effectuer dans les autres cas)
[ STUDENT > fi;   (fin du bloc)
```

Bloc pour : Un bloc *'pour'* permet d'effectuer une répétition des commandes du bloc. Il s'utilise lorsqu'on connaît le nombre de répétitions à effectuer. On indique au début du bloc comment doit varier un paramètre : valeurs initiale et finales, et pas.

Exemple :

```
[ STUDENT > for i from 1 by 2 to 11 do   (début du bloc, variation du paramètre)
[ STUDENT > commandes;   (suite de commandes à effectuer à chaque passage)
[ STUDENT > od;   (fin du bloc)
```

Bloc tant que : Un bloc *'tant que'* permet d'effectuer une répétition des commandes du bloc, et ce tant qu'une condition est vérifiée. Il s'utilise lorsqu'on ne connaît pas le nombre de répétitions à effectuer. Il est nécessaire de modifier la condition dans les commandes, pour éviter de boucler sans fin...

Exemple :

```
[ STUDENT > while condition do   (début du bloc, on teste condition)
[ STUDENT > commandes;   (suite de commandes à effectuer tant que condition est vérifié)
[ STUDENT > od;   (fin du bloc)
```

1.4 Exercices

Exercice 1.1. Exécuter 4 ou 5 commandes MAPLE issues du cours.

Exercice 1.2. Calculer et donner une approximation des nombres suivants :

$$3 + 4 \div 9 \times 7 \qquad 11! \qquad \frac{25 - 4i}{3 - 2i} \qquad \frac{e^{(3\ln(9))}}{\sin(\pi/6)}$$

Exercice 1.3. Simplifier les expressions suivantes :

$$x^3 - 4x + \frac{3}{4}x^2 + x(x^2 - \frac{6}{5}x) \qquad (a + 2b - c)(2c + b - 4a)(a - c + 2b) \qquad \frac{x^3 - 7x + 3x^2}{4x}$$

Exercice 1.4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\sin \qquad \ln \qquad x \mapsto x^2 + 25 \qquad x \mapsto \frac{x^2 - 6x - 3}{3x^2 - x + 1}$$

Représenter chaque couple fonction/dérivée sur un graphique. Commenter.

Exercice 1.5. Même exercice avec les primitives.

Exercice 1.6. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \cos(t)dt \qquad \int_{-5}^{5} (x^2 - 25)dx \qquad \int_0^1 (ln(u) - u)du.$$

Exercice 1.7. Calculer les nombres suivants de deux manières différentes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad \int_e^{\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^2}$$

Exercice 1.8. Stocker 0 dans une variable a et 1 dans une variable b. Ecrire une suite de commandes MAPLE qui échange les valeurs des deux variables a et b. Vérifier que $a = 1$ et $b = 0$.

Exercice 1.9. Ecrire une procédure qui calcule l'aire d'un triangle à partir de la base et de la hauteur. Ecrire une autre procédure qui calcule l'aire d'un triangle à partir des longueurs des trois côtés (on pourra calculer une hauteur et se servir de la procédure précédente).

Exercice 1.10. Donner le centième nombre premier. Calculer le produit des dix premiers nombres premiers, puis des cent premiers. Ecrire une procédure qui calcule le produit des N premiers nombres premiers.

Exercice 1.11. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge au sens de Césaro* si la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

converge. On appelle alors *limite de Césaro* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la limite de cette suite.

Ecrire une procédure qui calcule la limite de Césaro d'une suite u. L'appliquer au calcul de la limite de Césaro de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Toute suite convergente converge-t-elle au sens de Césaro ? Et réciproquement ? Que dire de leurs éventuelles limites ?

2 Fonctions

2.1 Généralités

Une *fonction* (contrairement à une *expression*) associe une valeur à une ou plusieurs variables. Les fonctions se présentent sous la forme $(x_1, \ldots, x_n) \to f(x_1, \ldots, x_n)$, et on accède à la valeur en un point par $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemple :

```
[ STUDENT > f :=(x,y)->x**2-y**2+10*cos(x)*sin(y) :
[ STUDENT > f(Pi,0) ;
```

$$\pi^2$$

Remarque. Il est possible de définir des fonctions par morceaux grâce à la fonction piecewise.

2.2 Composée de fonctions

La composée de fonctions s'obtient en MAPLE grâce au symbole «@».

Exemple :

```
[ STUDENT > f :=x->x**2 :g :=x->sqrt(x) :h :=g@f :h(x) ;
```

$$\sqrt{x^2}$$

2.3 Dérivées et intégrales

La dérivée d'une *fonction* s'obtient directement par l'opérateur D.

Exemple :

```
[ STUDENT > D(sin) ;
```

$$\cos$$

La dérivée et l'intégrale (ou une primitive) d'une expression sont données respectivement par les fonctions diff et int.

Exemple :

```
[ STUDENT > diff(int(f(t),t=0..x),x) ;
```

$$f(x)$$

2.4 Développements limités et asymptotiques

Le développement limité d'une fonction (ou le développement asymptotique) s'obtient à l'aide de la fonction series. On peut obtenir le premier terme non nul (donc un équivalent) en se servant de la fonction leadterm.

Exemple :

```
[ STUDENT > series(cos(x),x=0,3) ;series(leadterm(cos(x)-1),x=0,3) ;
```

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{O}(x^3)$$

$$-\frac{1}{2}x^2$$

2.5 Représentation des fonctions

La représentation graphique d'une fonction est obtenue en général par la commande plot. On présente dans la suite différentes options de cette fonction et d'autres cas plus particuliers.

2.5.1 Cas $y = f(x)$

C'est le cas le plus simple : on n'a besoin de ne donner aucune option à la fonction plot. MAPLE détermine directement tout le nécessaire (intervalle, etc...), mais on peut préciser des options facultatives (discontinuités, axes, style, couleur...). Tout ceci est expliqué dans l'aide.

2.5.2 Représentation paramétrique plane

La représentation de courbes paramétriques est également possible via la fonction plot : il suffit de donner les fonctions $x(t)$ et $y(t)$, et de préciser l'intervalle dans lequel varie t.

Exemple :

```
[ STUDENT > plot([cos(t),sin(t),t=0..Pi/2]);
```

2.5.3 Représentation en coordonnées polaires

Il s'agit d'un cas particulier du cas précédent, où la première fonction est la distance à l'origine la deuxième fonction est l'angle par rapport à l'axe des abscisses (coordonnés polaires). Il suffit de préciser en options que l'on considère ce système de coordonnées au moyen de : «coords=polar».

Exemple :

```
[ STUDENT > plot([cos(t)**2-1,t,t=0..2*Pi],coords=polar);
```

2.5.4 Surfaces dans l'espace

Il est possible de représenter des fonctions à deux variables dans l'espace (surfaces) grâce à la commande plot3d. Celle-ci fonctionne de manière similaire à la fonction plot, toutefois elle prend en compte plus d'arguments (correspondant aux deux variables). Deux nouvelles options sont également disponibles (ombre, etc...). Il est possible de représenter des surfaces paramétriques, ainsi que des surfaces définies en coordonnées cylindriques, sphériques...

Coordonnées cartésiennes : La fonction est donnée par $z = f(x, y)$.

Exemple :

```
[ STUDENT > plot3d(sin(x*y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi);
```

Surface paramétrique : La fonction est donnée par le système

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases} .$$

Exemple :
[**STUDENT** > **plot3d([cos(u)+sin(v),sin((u)-cos(v),v],u=-Pi..Pi,v=-2*Pi ..2*Pi);**

Coordonnées cylindriques : La fonction est donnée par $z = f(r, \theta)$. Il faut préciser «coords=cylindrical».

Exemple :
[**STUDENT** > **plot3d([sin(z)/z,theta,z],theta=0..2*Pi,z=-3*Pi..3*Pi,coor ds=cylindrical);**

Coordonnées sphériques : La fonction est donnée par $r = f(\theta, \phi)$. Il faut préciser «coords=spherical».

Exemple :
[**STUDENT** > **plot3d([1+cos(5*theta)/10+cos(3*phi)/10,theta,phi],theta= -Pi..Pi,phi=0..Pi,coords=spherical);**

2.5.5 Courbes dans l'espace

L'extension plots permet de représenter des courbes dans l'espace (et non plus des surfaces) grâce à la fonction spacecurve. On peut ainsi représenter des hélices, des noeuds, etc...

Exemple :
[**STUDENT** > **with(plots) :**
[**STUDENT** > **spacecurve([cos(t),sin(t),sin(4*t)],t=0..2*Pi);**

2.5.6 Assemblage de différents graphes

On peut représenter sur le même graphique plusieurs courbes planes ou surfaces dans l'espace directement avec les fonctions plot et plot3d. Cependant il est également possible d'assembler des graphiques de courbes ou de surfaces de type différent. Pour cela, il faut charger la bibliothèque plots, stocker les graphes dans des variables, puis utiliser la commande display, comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple :
[**STUDENT** > **with(plots) :**
[**STUDENT** > **c :=plot([-sin(3*t),t,t=0..Pi],coords=polar) :c;**
[**STUDENT** > **d :=plot(sin(x)/x,x) :d;**
[**STUDENT** > **display([c,d],axes=none);**

2.6 Exercices

Exercice 2.1. Donner les développements limités des fonctions suivantes, aux points précisés et à un ordre convenable :

$$\frac{\arctan(x)-x}{x^2\sin(x)} \text{ en } 0, \qquad \frac{(1+3x)^4-1}{\ln(1-x)-x} \text{ en } 0, \qquad \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(x)} \text{ en } \pi.$$

Quel est le développement limité en 0 de $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$?

Exercice 2.2. Représenter les fonctions d'équations paramétriques suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\sin(t)+\cos(t/2) \\ y(t)=-\cos(2t) \end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos(6t)-3\cos(t/2) \\ y(t)=\cos(t) \end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos(11t) \\ y(t)=\sin(17t) \end{array}\right..$$

Exercice 2.3. Tracer les courbes d'équations polaires suivantes :

$$\rho(\theta)=\theta\sin(\theta), \qquad \rho(\theta)=(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}, \qquad \rho(\theta)=\sin(9,9\theta)\cos(\theta).$$

Exercice 2.4. Définir une fonction $f : x \mapsto \sin(x-1)$ et une fonction $g : x \mapsto \cos(x)$. Définir $h=f+g$ et $c=g\circ f$.
Représenter graphiquement h, c et la courbe d'équation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=f(t) \\ y(t)=g(t) \end{array}\right..$$

Assembler ces graphes sur un même graphique.

Exercice 2.5. Tracer les figures suivantes (on pourra les tracer sur le même graphique, utiliser des couleurs...) :
- le segment $[A,B]$ où A et B sont de coordonnées $(3,1)$ et $(-1,-1)$,
- le cercle unité et un de ses diamètres,
- une ellipse de centre (0,2) de grand axe 5 et de petit axe 3.

Exercice 2.6. Même exercice avec les figures suivantes dans l'espace :
- un ellipsoïde de centre (3,4,-1) d'axes 2, 1 et 4,
- le segment $[A,B]$ où A et B sont de coordonnées $(3,1,-1)$ et $(-1,-1,6)$,
- une spirale d'axe (y',y), de pas 2 et de rayon 2,
- un cône de sommet A, d'axe vertical, de hauteur 4 et d'angle au sommet 60°.

Exercice 2.7. Soit une courbe dans le plan (x,y) d'équation $y=f(x)$. Ecrire une procédure qui, à partir de f et d'un nombre x_0, donne l'équation de la droite D tangente à la courbe de f, et trace sur un même graphique la courbe de f et la droite D. Même question pour le plan tangent à une surface d'équation $z=g(x,y)$ dans l'espace.

3 Eléments d'arithmétique

3.1 Division, reste, pgcd, congruence

MAPLE permet de manipuler avec facilité les entiers et ainsi de résoudre des problèmes d'arithmétique.

Division euclidienne : Soient a et b deux entiers dans $\mathbb{Z}$. Il existe une unique *division euclidienne* de b par a, qui s'écrit $b = aq + r$ avec $0 \leq r < |a|$. On appelle q et r respectivement le *quotient* et le *reste* de la division de b par a. Si a et b sont dans $\mathbb{N}$, ils sont donnés dans MAPLE par les fonctions iquo et modp.

Exemples :
Notons les réponses de MAPLE lorsque a et b sont dans $\mathbb{N}$ ou non :

- La division euclidienne de 17 par 4 est $17 = 4 \times 4 + 1$. MAPLE donne :

```
[ STUDENT > iquo(17,4);modp(17,4);
                    4
                    1
```

- La division euclidienne de -17 par 4 est $-17 = 4 \times (-5) + 3$ (attention : ce n'est pas l'opposée de la division de 17 par 4...). MAPLE donne :

```
[ STUDENT > iquo(-17,4);modp(-17,4);
                    3
                    3
```

Divisibilité : Pour a et b dans $\mathbb{Z}$, on dit que a divise b si le reste de la division de b par a est nul.

Remarque. La fonction divide de MAPLE ne sert pas à déterminer si un entier donné en divise un autre. Pour cela, il faut tester si la fonction modp appliquée aux deux entiers donne 0.

Pgcd : La divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ qui lui donne une strucutre de treillis. En effet deux entiers a et b quelconque admettent un unique *plus grand commun diviseur* (pgcd). Il est donné par l'*algorithme d'Euclide*, qui repose sur la remarque suivante : si $b = aq + r$ est la division euclidienne de b par a alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, r)$. MAPLE le calcule par la fonction gcd (*greatest common divisor*).

Exemple :

```
[ STUDENT > gcd(47250,23544);gcd(5465,986);
                    54
                    1
```

Remarque (Algorithme d'Euclide)**.** La procédure qui donne le pgcd selon l'algorithme d'Euclide est la suivante (il s'agit d'une procédure récursive, c'est-à-dire qui s'appelle elle-même) :

```
[ STUDENT > pgcd :=proc(a,b)
[ STUDENT > if b<a then pgcd (b,a);
[ STUDENT > else if a=0 then b;
[ STUDENT > else if a=1 then 1;
[ STUDENT > else pgcd(modp(b,a),a);
[ STUDENT > fi;
[ STUDENT > fi;
```

```
[ STUDENT > fi;
[ STUDENT > end :
```

3.2 Nombres premiers

Un entier est dit *premier* s'il admet exactement quatre diviseurs dans $\mathbb{Z}$ (deux dans $\mathbb{N}$). Les nombres premiers ont toujours apporté des questions mathématiques intéressantes et beaucoup sont toujours ouvertes. Les fonctions MAPLE relatives aux nombres premiers sont les suivantes :

- isprime, ithprime, prevprime, nextprime
- ifactor : donne la factorisation d'un entier en nombres premiers

3.3 Exercices

Exercice 3.1. Donner les 17ème, 23ème et 10301ème nombres premiers.
Comment faire sans la fonction ithprime (on demande juste de décrire le processus) ?

Exercice 3.2. Factoriser en nombre premiers les nombres suivants :

$$101 \qquad 98989 \qquad 73737373 \qquad 543312.$$

En déduire le nombre de diviseurs de chacun d'eux.

Exercice 3.3. Trouver avec MAPLE la division euclidienne de b par a dans les cas suivants (on pourra utiliser les fonctions iquo et modp ; vérifier qu'à chaque fois on a bien $b = aq + r$) :

$$a = 7453, b = 17 \qquad a = -7453, b = 17 \qquad a = 7453, b = -17 \qquad a = -7453, b = -17.$$

Que remarque-t-on ? Comment obtenir le quotient de b par a dans $\mathbb{Z}$ à partir de la fonction iquo ?
Question subsidiaire : écrire une procédure qui donne le quotient et le reste de la division de b par a dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3.4. Trouver le plus petit multiple commun des nombres a et b dans les cas suivants :

$$a = 11, b = 101 \qquad a = 909, b = 101 \qquad a = 52525, b = 501105 \qquad a = 651, b = 434.$$

Exercice 3.5. Soient deux entiers a et b. On dit que a et b sont *premiers entre eux* si leur pgcd est égal à 1. Ecrire une commande renvoyant «vrai» si deux entiers sont premiers entre eux et «faux» sinon (on pourra se servir de la fonction evalb). Ecrire une procédure qui teste si deux nombres sont premiers entre eux.

Exercice 3.6. Ecrire une procédure récursive qui calcule $n!$ pour un entier n donné.

Exercice 3.7. Deux nombres premiers sont dits *jumeaux* si leur différence est 2. Ecrire une procédure qui trouve le n-ième couple de nombres premiers jumeaux.

Exercice 3.8. Ecrire une procédure qui affiche la liste des diviseurs d'un entier donné.
On dit qu'un entier est *parfait* s'il est la somme de ses diviseurs stricts. Ecrire une procédure qui détermine si un entier donné est parfait (on pourra auparavant calculer la somme des diviseurs stricts d'un nombre). Existe-t-il des nombres parfaits ?

Exercice 3.9. Résoudre avec MAPLE les équations suivantes d'inconnues n et p dans $\mathbb{Z}$:

$$4n + 5p = 7 \qquad 56n - 84p = 36 \qquad 84n - 99p = -13131.$$

Comment se résout le cas général ? Ecrire une procédure pour résoudre l'équation $an + bp = c$, étant donnés trois entiers a, b et c.

Exercice 3.10. Soient a et b deux entiers. On cherche à trouver des nombres premiers congrus à b modulo a. Ecrire une procédure qui permette de trouver des nombres premiers vérifiant ce critère (plusieurs solutions sont possibles selon les fonctions utilisées).

4 Polynômes

4.1 Généralités

Un polynôme est une expression en un certain nombre de variables. On le différenciera de la fonction polynôme associée.

Exemple :
```
[ STUDENT > P :=x**2+3*x-1;f :=x->x**2+3*x-1;
```

$$P := x^2 + 3x - 1$$
$$f := x \to x^2 + 3x - 1$$

4.2 Opérations sur les polynômes

Les opérations et fonctions disponibles pour les polynômes sont en particulier celles des expressions, plus certaines intrinsèques (degré, coefficients, etc).

4.2.1 Opérations algébriques

Degré : la fonction degree donne le degré d'un polynôme en la variable demandée.

Exemple :
```
[ STUDENT > degree(x**2*y,y);
```

$$1$$

Coefficients : les fonctions coeff et coeffs donnent respectivement un coefficient et la suite des coefficients d'un polynôme ; les fonctions lcoeff et tcoeff donnent respectivement le coefficient dominant et le coefficient de plus bas degré.

4.2.2 Opérations arithmétiques

Division : la fonction divide permet de tester si un polynôme divise un polynôme donné, et de récupérer le quotienet le cas échéant.

Division euclidienne : les fonctions rem et quo donnent respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de deux polynômes.

pgcd et ppcm : le pgcd (respectivement le ppcm) de deux polynômes est donné par la fonction gcd (respectivement lcm).

4.2.3 Opérations de calcul

Evaluation : la commande subs permet d'évaluer un polynôme en un point.

Exemple :
```
[ STUDENT > P :=x**2;subs(x=2,P);
```

$$P := x^2$$
$$4$$

Racines : l'ensemble des racines d'un polynôme est donné par la fonction root.

4.3 Exercices

Exercice 4.1. Soit P le polynôme $X^6 + \frac{1}{3}X^5 + \frac{14}{3}X^4 - \frac{2}{3}X^3 + \frac{20}{3}X^2 + 3$. Quelles sont les racines réelles de P ? Complexes ?

Factoriser P sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4.2. Déterminer les pgcd et ppcm des polynômes suivants :

$$X+1 \text{ et } X^2+1, \qquad X^2-4 \text{ et } X^2-2X,$$

$$(X-1)(X-\tfrac{3}{2}),\ (X-\tfrac{3}{2})(X+4) \text{ et } (X+4)(X-\tfrac{2}{3}).$$

Quelles formules a-t-on entre pgcd et ppcm ?

Exercice 4.3. Trouver tous les polynômes P satisfaisant les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \deg P = 3 \\ P(0) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \deg P = 4 \\ P(0) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \deg P = 3 \\ P(0) = 0 \\ P'(0) = 1 \\ P''(0) = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \deg P = 4 \\ P(0) = 0 \\ P'(0) = 1 \\ P''(0) = 2 \end{cases}.$$

Exercice 4.4. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(7 \operatorname{Arccos} x)$ est une fonction polynôme de degré 7.

Exercice 4.5. Pour tout polynôme P en une indéterminée X, on définit le polynôme $\Delta(P)$ par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

Que vaut $\Delta(P)$ pour un polynôme P de degré 0 ? de degré 1 ? de degré 2 ?

Ecrire une procédure qui calcule, pour un polynôme P donné, le polynôme $\Delta(P)$. Même question pour calculer le polynôme $\Delta^2(P)$ défini par $\Delta^2(P) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$.

Question subsidiaire : Ecrire une procédure qui calcule le polynôme $\Delta^k(P)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.6. Soit P le polynôme $X^4 - 36X^3 + 3X^2 - 6X - 1$.

Donner les valeurs des dérivées $k$èmes de P en 0, pour k entre 0 et 5.

Comment obtenir la suite de ces valeurs en utilisant la commande seq ?

Ecrire une procédure donnant la suite des dérivées $k$èmes d'un polynôme Q en 0 pour k variant entre 0 et $\deg Q + 1$.

Exercice 4.7. Soit P la fonction polynôme à deux variables définie par

$$P(x,y) = 2xy^2 + x^2y - y^2 + 3xy - y^2 + x - 2y + 4.$$

Quel est le degré global de P ? le degré en x ? le degré en y ?

Calculer les racines de P en la variable x en fonction de y.

Calculer les racines de P en x pour $y = \frac{36}{17}$ de deux manières différentes (on pourra penser à utiliser la fonction subs).

5 Suites, ensembles et listes

5.1 Suites

On peut créer un objet *suite* dans MAPLE en intercalant des virgules entre les différents éléments. On peut également utiliser la fonction seq pour créer des listes automatiquement. Comme expliqué dans l'aide de cette fonction, il existe deux méthodes pour définir une suite : faire varier l'indice dans une plage de valeurs, ou dans une suite donnée. Dans ce deuxième cas, le paramètre «x=S» où S est une suite signifie que x va prendre successivement toutes les valeurs des éléments de S.

Remarque. Les suites que nous avons définies ici sont des suites *finies* et en aucun cas infinies. Il s'agit d'outils pour la réalisation de boucles ou de procédures et elles ne doivent pas être utilisées pour des études de suites mathématiques. Dans ce dernier cas, on doit utiliser des fonctions du type $u := n \mapsto u_n$.

Exemples :

```
[ STUDENT > S1 :=131,99,-Pi,7;
```

$$S1 := 131, 99, -\pi, 7$$

```
[ STUDENT > S2 :=seq(abs(i),i=-2..2);
```

$$S2 := 2, 1, 0, 1, 2$$

```
[ STUDENT > S3 :=seq(x**2,x=(1,3,9)); S4 :=seq(cos(x),x=S1);
```

$$S3 := 1, 9, 81$$
$$S4 := \cos(131), \cos(99), -1, \cos(7)$$

Remarque. Ces exemples montrent que, dans une suite, il peut y avoir plusieurs fois la même valeur, contrairement à ce qu'il se passe pour un ensemble (voir le paragraphe suivant).

Opérations sur les suites

La structure de suite en MAPLE permet de faire les différentes opérations naturelles suivantes :

Accession à un élément de la suite : la commande «S[i]» perme d'accéder à l'élément i de la suite S. Si i est négatif, on obtient le $i$ème élément à partir de la fin.

Exemple :

```
[ STUDENT > S :=-2,1,0,1,2 : S1[1],S[-2];
```

$$-2, 1$$

Sous-suite : on peut aussi accéder à la sous-suite d'une suite S comprise entre deux indices i et j par la commande «S[i..j]».

Exemple :

```
[ STUDENT > S :=-2,-1,0,1,2 : S[2..-2];
```

$$-1, 0, 1$$

Concaténation : pour *concaténer* (juxtaposer) deux suites, il suffit de les écrire l'une après l'autre et d'intercaler une virgule.

Exemple :

```
[ STUDENT > S1 :=-2,-1 : S2 :=1,2 : S :=S1,0,S2 : S;
```

$$-2, -1, 0, 1, 2$$

5.2 Ensembles

Un *ensemble* (fini) se définit dans MAPLE par une suite entre accolades. Il est important de remarquer que, dans un ensemble, tous les éléments sont distincts. On accède à une suite donnant les éléments d'un ensemble par la fonction op (*operands*). Comme pour une suite, on peut accéder aux éléments d'un ensemble par la commande «E[i]», toutefois il est important de remarquer que les éléments d'un ensemble ne sont pas naturellement ordonnés, et que MAPLE les ordonne selon ses critères, il est donc hasardeux d'utiliser cette commande pour des ensembles.

Exemples :

```
[ STUDENT > {4,3,1,4}; S :=-1,0,1 : {S}; op(4,3,1);
```

$$\{1,3,4\}$$
$$\{-1,0,1\}$$
$$1,3,4$$

Les ensembles de MAPLE sont munis des opérations suivantes :

Opérations sur les ensembles

Cardinal : le cardinal d'un ensemble s'obtient par la commande nops (*number of operands*).

Exemple :

```
[ STUDENT > nops({-1,0,1});
```

$$3$$

Union : la réunion de deux ensembles s'obtient par la commande union.

Exemple :

```
[ STUDENT > {0,1} union {0,-1};
```

$$\{-1,0,1\}$$

Intersection : l'intersection de deux ensembles s'obtient par la commande intersect.

Exemple :

```
[ STUDENT > {0,1} intersect {0,-1};
```

$$\{0\}$$

Différence : la différence de deux ensembles s'obtient par la commande minus.

Exemple :

```
[ STUDENT > {0,1} minus {0,-1};
```

$$\{1\}$$

Remarque. L'ensemble vide s'écrit $\{\}$.

5.3 Listes

Un *liste* (finie) se définit dans MAPLE par une suite entre crochets. On accède à la suite donnant les éléments d'une liste par la fonction op (*operands*), comme pour un ensemble. On peut de même accéder aux éléments d'une liste par la commande «L[i]».

Exemples :
```
[ STUDENT > S :=1,2,3 : L :=[S]; op(L); L[-1];
```
$$[1, 2, 3]$$
$$1, 2, 3$$
$$3$$

Les listes de MAPLE sont munies des opérations suivantes :

Opérations sur les listes

Longueur : la longueur d'une liste s'obtient par la commande nops (*number of operands*).

Exemple :
```
[ STUDENT > nops([-1,0,1]);
```
$$3$$

Remplacement d'un élément : on peut remplacer le $i$ème élément d'une liste L par la valeur x par la commande « subsop(i=x,L)».

Exemple :
```
[ STUDENT > subsop(2=11,[-1,0,1]);
```
$$[-1, 11, 1]$$

Effacement d'un élément : on peut supprimer le $i$ème élément d'une liste L par la commande « subsop(i=NULL,L)» (en fait on le remplace par rien).

Exemple :
```
[ STUDENT > subsop(2=NULL,[-1,0,1]);
```
$$[-1, 1]$$

Concaténation : pour concaténer deux listes, le plus simple est de concaténer les suites associées et de recréer la liste associée.

Exemple :
```
[ STUDENT > L1 :=[1,2] : L2 :=[2,3] : L :=[op(L1),op(L2)];
```
$$[1, 2, 2, 3]$$

Remarque. La liste vide s'écrit [].

5.4 Tris

Il existe de nombreuses manières de trier des listes. Les algorithmes les plus rapides sont implémentés dans la fonction sort de MAPLE .

Exemple :
```
[ STUDENT > sort([9,5,7,1,4]);
```
$$[1, 4, 5, 7, 9]$$

5.5 Exercices

Les exercices peuvent être abordés de manière dépendante : on pourra se servir de procédures d'un exercice pour résoudre les exercices suivants.

Exercice 5.1. Transformer les objets suivants en suites, ensembles ou listes selon les cas :

$$7, 9, 11, 11 \qquad \{1, 2, 1\} \qquad [1, 2, 1] \qquad [] \qquad x_1, \ldots, x_{101}.$$

Exercice 5.2. Définir les objets suivants :
- la liste des 100 premiers nombres premiers,
- l'ensemble des racines 5èmes de l'unité,
- l'ensemble des racines du polynôme $4x^4 + 6x^2 + 1$,
- la liste des valeurs de la fonction cos pour les nombres x_k de la forme $\frac{k\pi}{6}$, avec $k \in \{-6, \ldots, 6\}$.

Exercice 5.3. Soit une liste L. On appelle *tête* de L le premier élément de L, et *queue* de L la liste des autres éléments de L. Ecrire deux procédures qui donnent respectivement la tête et la queue d'un liste.

Exercice 5.4. Ecrire une procédure qui teste (renvoie *true* ou *false*) si un élément appartient à un ensemble donné.

Exercice 5.5. Ecrire une procédure qui calcule le complémentaire d'un ensemble dans un autre.

Exercice 5.6. Soient E et F deux ensembles. On appelle *différence symétrique* de E et F l'ensemble noté $E\Delta F$ égal à $(E \cup F) - (E \cap F)$. Ecrire une procédure qui calcule la différence symétrique de deux ensembles.

Exercice 5.7. Ecrire une procédure qui, étant donnée une liste L, un indice i et un élément e, insère dans la liste L l'élément e à la place i.
Question subsidiaire : comment faire pour que cette procédure accepte des indices i négatifs ?

Exercice 5.8. Ecrire une procédure qui renvoie l'ensemble des diviseurs d'un nombre entier donné.

Exercice 5.9. Ecrire des procédures qui donnent le maximum et le minimum d'un ensemble donné.
Question subsidiaire : écrire des procédures qui donnent le maximum et le minimum d'une liste donnée, ainsi que leur nombre d'occurrences dans la liste.

Exercice 5.10. Ecrire une procédure qui calcule la moyenne des valeurs d'une liste de nombres.

Exercice 5.11. Définir la liste de fonctions $f_k : x \mapsto x^k$ pour $k = \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots, 6$. Tracer leurs représentations graphiques sur $[0, 1]$.

Exercice 5.12. Ecrire une procédure qui renverse une liste (ex : $[1, 3, 5, 7, 9] \mapsto [9, 7, 5, 3, 1]$).

6 Equations différentielles

Le logiciel MAPLE permet également de résoudre algébriquement des équations différentielles, mais aussi de calculer des valeurs approchées numériques des fonctions solutions.

6.1 Cas général

Une équation différentielle se résout par la commande dsolve. On indique les dérivés par diff, comme pour les dérivées classiques. On peut donner en option dans la commande un ensemble de conditions initiales.

Exemples :

```
[ STUDENT > dsolve(diff(y(x),x)-y(x)/x=x,y(x));
```

$$y(x) = x^2 + x\_C1$$

```
[ STUDENT > dsolve({diff(y(x),x)*y(x)=x,y(0)=1},y(x));
```

$$\sqrt{x^2+1}$$

6.2 Systèmes

Pour résoudre un système différentiel, il faut indiquer à la commande dsolve l'ensemble des équations à résoudre, ainsi que l'ensemble des fonctions inconnues. On peut également indiquer des conditions initiales.

Exemple :

```
[ STUDENT > dsolve({diff(x(t),t)-y(t)=0,diff(y(t),t)+x(t)=0},{x(t),y(t)});
```

$$\{x(t) = \cos(t)\_C1 + \sin(t)\_C2, y(t) = -\sin(t)\_C1 + \cos(t)\_C2\}$$

6.3 Dérivées partielles

Pour résoudre une équation aux dérivées partielles, on peut utiliser la commande pdesolve.

Exemple :

```
[ STUDENT > pdesolve(diff(f(x,y),x)-diff(f(x,y),y)+f(x,y)=0,f(x,y));
```

$$f(x,y) = \_F1(y+x)e^{(-x)}$$

6.4 Résolution numérique approchée

Pour les équations dont on ne connaît pas de valeur exacte, on peut calculer une fonction numérique approchée grâce à l'option «type=numeric». On peut alors par exemple stocker le résultat de la résolution dans une variable, pour l'utiliser par la suite.

Exemple :

```
[ STUDENT > F :=dsolve({diff(y(t),t$2)/y(t)=t*cos(t),y(0)=1,D(y)(0)=1},y(t)
,type=numeric) : F(1);
```

$$[t = 1, y(t) = 2.098035903112497, \frac{\partial}{\partial t}y(t) = 1.235949216081375]$$

6.5 Exercices

Exercice 6.1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y = 0, \qquad yy' + y = x, \qquad y'^2 + y^2 = 0.$$

Exercice 6.2. Résoudre les équations différentielles avec conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} y'' - 2y = e^{2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y^{(3)} + 2y' = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Exercice 6.3. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} y - x' + y' = 0 \\ x + x' + y' = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} tx' - y = t \\ ty' + x = \frac{1}{t} \end{cases}.$$

Exercice 6.4. Résoudre le système différentiel avec conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} x' - 3y' + 2x - y = 2t \\ 2x' + y' + 3x - 2y = \cos(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Exercice 6.5. Quelle est la solution générale de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$? Que retourne MAPLE ?

Exercice 6.6. Trouver la solution de l'équation d'un système oscillant $mx'' + \alpha x' + kx = f(t)$ dans les cas suivants (on prendra les conditions initiales $x_0 = 1$ et $v_0 = -1$). Tracer les courbes correspondantes (on pourra se servir de la commande rhs), les comparer avec la courbe de f dans chaque cas.

$$\begin{cases} m = 1 \\ \alpha = 0 \\ k = 1 \\ f(t) = 0 \\ \text{(harmonique)} \end{cases}, \qquad \begin{cases} m = 1 \\ \alpha = 0,5 \\ k = 1 \\ f(t) = 0 \\ \text{(amortissement)} \end{cases}, \qquad \begin{cases} m = 1 \\ \alpha = 0 \\ k = 1 \\ f(t) = \cos(t/2) \\ \text{(entretenu)} \end{cases}, \qquad \begin{cases} m = 1 \\ \alpha = 0 \\ k = 1 \\ f(t) = \cos(t) \\ \text{(résonance)} \end{cases}.$$

Exercice 6.7. Un coureur a une trajectoire d'équation paramétrique $\begin{cases} f(t) \\ g(t) \end{cases}$ dans le plan. Un chien se trouve en $t = 0$ en position $(0, 0)$ et à partir de ce moment là se déplace en direction du coureur à la vitesse constante v_0. Déterminer le système différentiel donnant la trajectoire du chien au cours du temps. Le résoudre numériquement avec MAPLE . Tracer les courbes paramétrées sur un graphique pour différentes fonctions f et g (on prendra $v_0 = 1$). Commenter.

7 Algèbre linéaire

De nombreuses fonctions utiles pour les études d'algèbre linéaire (matrices, etc.) sont disponibles dont la bibliothèque linalg. Cette partie présente différentes commandes qui s'y trouvent. Dans les exemples, on supposera que la bibliothèque linalg a été chargée, par la commande «with(linalg) :».

7.1 Vecteurs et matrices

7.1.1 Vecteurs

Un *vecteur* en MAPLE est représenté par un tableau (*array*) dont les indices varient de 1 à ℓ. Pour créer un vecteur, on utilise la commande vector de MAPLE , qui prend en argument la longueur du vecteur (dimension de l'espace) et éventuellement une liste de valeurs.

Exemple :

```
[ STUDENT > vector(6,[1,-2,9,4]);
```

$$[1, -2, 9, 4, x_5, x_6]$$

Remarque. Un vecteur se présente comme une liste, en particulier on accède à ses éléments de la même manière. Il est cependant implémenté différemment dans l'ordinateur, qui reconnaît les différences entre les deux.

Exemple :

```
[ STUDENT > x :=vector(3,[1,2,3]);
```

$$[1, 2, 3]$$

```
[ STUDENT > type(x,vector);
```

$$true$$

```
[ STUDENT > l :=[1,2,3];
```

$$[1, 2, 3]$$

```
[ STUDENT > type(l,vector); type(l,list);
```

$$false$$
$$true$$

7.1.2 Matrices

Un *matrice* en MAPLE est un tableau à deux dimensions. On crée une matrice grâce à la commande matrix, qui prend en argument le nombre de lignes et de colonnes et éventuellement une liste de valeurs, ou une fonction à deux variables. La commande blockmatrix permet de créer des matrics par blocs.

Exemple :

```
[ STUDENT > A :=matrix(2,3,[[1,-2],[9,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & A_{1,3} \\ 9 & 4 & A_{2,3} \end{bmatrix}$$

7.2 Opérations algébriques

On peut évaluer des expressions matricielles par la commande evalm. Le produit matriciel se représente par l'opérateur «&*». La matrice unité est représentée par «&*()». On peut également utiliser les commandes matadd, scalarmul et multiply.

Exemples :
```
[ STUDENT > A :=matrix(2,2,[[1,-2],[9,4]]) :
[ STUDENT > B :=evalm(A**2+3*&*());
```

$$B := \begin{bmatrix} -14 & -10 \\ 45 & 1 \end{bmatrix}$$

7.3 Autres opérations

7.3.1 Opérations sur les matrices

Accéder à un élément : Pour accéder au coefficient (i, j) de la matrice A on demande de la même manière que pour les listes «A[i,j]».

Accéder à une ligne ou une colonne : Les commandes row et col renvoient respectivement un vecteur ligne et un vecteur colonne d'une matrice donnée.

Exemple :
```
[ STUDENT > col(matrix([[1,2],[3,4]]),2);
```

$$[2, 4]$$

Nombre de lignes et colonnes : Les fonctions rowdim et coldim donnent respectivement ces deux nombres.

Sous-matrice : On accède à une sous-matrice d'une matrice donnée grâce à la fonction submatrix.

Echange de lignes et colonnes : Pour échanger deux lignes ou deux colonnes d'une matrice donnée, on utilise les fonction swaprow et swapcol respectivement.

Exemple :
```
[ STUDENT > swaprow(matrix([[1,2],[3,4]])1,2);
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les colonnes : La commande addrow (resp. addcol) permet, étant donnés deux indices i et j, d'ajouter à la ligne (resp. la colonne) d'indice i d'une matrice un multiple de la ligne (resp. la colonne) d'indice j.

Exemple :
```
[ STUDENT > A :=matrix([[1,2],[3,4]]); addrow(A,1,2,-3);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1)$$

7.3.2 Opérateurs mathématiques

Base d'un espace : La commande basis donne une base de l'espace engendré par des vecteurs.

Exemple :
[**STUDENT** > **basis([vector([1,2,3]),vector([4,5,6]),vector([7,8,9])]);**

$$[[1,2,3],[4,5,6]]$$

Noyau : La commande kernel donne le noyau d'une matrice.

Exemple :
[**STUDENT** > **kernel(matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]));**

$$\{[1,-2,1]\}$$

Rang : La fonction rank donne le rang d'une matrice.

Mineur, déterminant : Les mineurs et le déterminant d'une matrice sont donnés respectivement par minor et det.

Trace : La trace d'une matrice s'obtient par la commande trace.

Inverse : L'inverse d'une matrice s'obtient par la commande inverse.

Transposée, adjointe : La transposée d'une matrice et son adjointe sont données respectivement par les fonctions transpose et adjoint.

Polynômes : On accède au polynôme minimal et au polynôme caractéristique d'une matrice par les fonctions minpoly et charpoly.

Eléments propres : Les valeurs propres d'une matrice sont données par la fonction eigenvals ; la fonction eigenvects permet en outre d'avoir la multiplicité ainsi qu'une base de vecteurs propres pour chaque sous-espace propre.

Exemple :
[**STUDENT** > **A :=matrix([[2,6,5],[-1,4,4],[1,5,5]]) :**
[**STUDENT** > **eigenvals(A); eigenvects(A);**

$$9,1,1$$

$$\left[9,1,\left\{\left[\tfrac{49}{23},1,\tfrac{41}{23}\right]\right\}\right],[1,2,\{[1,-1,1]\}]$$

Produits scalaire, vectoriel : Les fonctions dotprod et crossprod donnent respectivement le produit scalaire de deux vecteurs (ou de deux matrices) et le produit vectoriel.

Normes : La fonction norm (redéfinie par linalg) permet d'obtenir la norme d'un vecteur ou d'une matrice. On peut préciser s'il s'agit de la norme infinie, la norme euclidienne, etc.

Exemple :
[**STUDENT** > **x :=vector([1,-1,0]) :**
[**STUDENT** > **norm(x,1); norm(x,2); norm(x,infinity);**

$$2$$

$$\sqrt{2}$$

$$1$$

7.4 Exercices

Exercice 7.1. Soient A la matrice $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et B la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Calculer les matrices suivantes :

$$A^2 - 3B, \qquad (A+I)^3 - (B-2I)^2, \qquad (AB^2 - I)^2 - I.$$

Exercice 7.2. Calculer les déterminants et, lorsque c'est possible, les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 9 & -20 & -17 \\ -5 & -4 & -11 \\ 5 & 16 & 23 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 9 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 7.3. Trouver les polynômes minimal et caractéristique ainsi que les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices de l'exercice précédent. Quelles matrices sont diagonalisables ?

Exercice 7.4. Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. Construire la matrice par blocs $\begin{bmatrix} A & I_3 \\ 0 & A^2 \end{bmatrix}$.

Exercice 7.5. Ecrire une procédure qui, étant données une matrice A et une matrice P inversible, calcule la matrice $P^{-1}AP$, conjuguée de A par P.

Exercice 7.6. On appelle matrice de Vandermonde pour les nombres $x_1, \ldots, x_k$ la matrice

$$V(x_1, \ldots, x_k) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \ldots & x_k^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Calculer les déterminants de $V(-1, 7, 11, 4)$, $V(x, y)$, $V(1, 2, 3, x)$.
Quelle est la formule générale du déterminant de Vandermonde ?

Exercice 7.7. Ecrire des procédures qui testent si une matrice est diagonale, triangulaire, symétrique, antisymétrique.

Exercice 7.8. Ecrire une procédure qui construit la matrice de la dérivation de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même, pour n donné. Quel est son noyau ? Son polynôme caractéristique ? Ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 7.9. Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Donner, si c'est possible, une matrice triangulaire supérieure T équivalente à A.
Question subsidiaire : donner la matrice P telle que $A = P^{-1}T$.

Exercice 7.10. Tracer les sphères unités des normes p de $\mathbb{R}^2$ pour $p = 1, 2, 3, 4, \infty$.

8 Problèmes

Problème 1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ pour x dans l'intervalle $]-1,+\infty[$.
2. Pour tout x de $]-1,+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. Vérifier qu'on définit ainsi une suite de fonctions strictement croissante sur $]-1,+\infty[$. Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ de f avec la droite $\mathcal{D}$.

Problème 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-x^3+5x}{x^2+3}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. a. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x, on ait $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2+3}$.
   b. Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. Soit f' la dérivée de f.
   a. Montrer que $f'(x) = \frac{(1-x^2)(x^2+15)}{(x^2+3)^2}$.
   b. Etudier les variations de f.
3. Préciser une équation de la tangente T à la courbe C à l'origine.
4. Soit D la droite d'équation $y = -x$.
   a. Etudier la position de C relativement à la droite D.
   b. Montrer que, pour tout x non nul on a $f(x) + x = \frac{8}{x(1+\frac{3}{x^2})}$.
   c. En déduire la limite de $f(x) + x$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on en conclure pour la courbe C ?
5. Tracer D, T et C sur un même graphique (on précisera les points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses).

Problème 3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1+i$, $3-i$ et 2.
A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image de M.

1. Faire une figure et la compléter tout au long du problème.
2. Calculer les affixes des points A' et B', images respectives de A et B. Que remarque-t-on ?
3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.
4. a. Vérifier que pour tout nombre complexe z on a $z' + 4 = (z-2)^2$.
   b. En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ et, lorsque z est différent de 2, entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.
   c. Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 ?
5. Soient E le point d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E.
   a. Calculer la distance JE et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \vec{JE})$.

b. Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \vec{JE'})$.

Problème 4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(1;1;0) \qquad B(1;2;1) \qquad C(3;-1;2).$$

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+2y-z-4 = 0$ et $2x+3y-2z-5 = 0$.
   Démontrer que l'intersection des plans P et Q est une droite $(\mathcal{D})$ d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?
4. Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$.

Problème 5. Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit f l'endomorphisme de E de matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dans la base canonique.

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
3. On considère une nouvelle famille (u_1, u_2, u_3) de vecteurs dont les coordonées dans la base canonique sont respectivement $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$.
   a. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.
   b. Donner la matrice de f dans cette base.
4. Ecrire la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, u_3).
5. Calculer A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$ par la fomule du changement de base.

Problème 6. Le but de ce problème est de représenter des fleurs de différentes sortes (nombres de pétales, formes...). Tout au long de cet exercice on utilisera l'option «scaling = constrained» de la fonction plot.

1. Représenter la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \cos(2\theta)$ pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.
2. Donner une équation paramétrique de la courbe précédente.
3. Nous allons nous servir de cette courbe pour dessiner les pétales et les feuilles.
   a. Ecrire une procédure petale fonction de t, θ et (x, y) qui dessine un pétale partant du point de coordonnées (x, y), de taille t et d'angle θ par rapport à l'horizontale (on se servira de la courbe précédente).
   b. Ecrire une procédure feuille fonction de t, θ et (x, y) qui dessine une feuille partant du point de coordonnées (x, y), de taille t et d'angle θ par rapport à la verticale.
   c. Ecrire une procédure tige fonction de x, y, x' et y' qui dessine le segment d'extrémités les points de coordonnées (x, y) et (x', y').

4. Ecrire une procédure fleur qui combine les différentes procédures précédentes pour construire une fleur complète.
5. Représenter un parterre de fleurs. On pourra améliorer la procédure fleur en ajoutant des paramètres (nombre de feuilles, de pétales, tailles respectives, orientations...), utiliser des boucles, des procédés aléatoires...

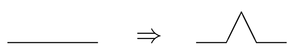
Problème 7. On cherche à représenter le système solaire. On donne le tableau suivant :

	d (ua)	r (km)
soleil	0	696 000
mercure	0,4	2 439,7
venus	0,7	6 051,8
terre	1	6 378,137
mars	1,5	3 402,45
jupiter	5,2	71 492
saturne	9,5	60 268
uranus	19,6	25 656
neptune	30	24 961
lune	380 000/ua	3 474,6

On donne de plus $1\,\text{ua} = 149\,597\,887,5\,\text{km}$.

1. Ecrire une procédure sphere qui trace la sphère centrée en (x, y, z), de rayon r et d'une couleur donnée (on utilisera les options «scaling=constrained», et «style=patch»).
2. Ecrire une procédure cercle qui trace le cercle centré en (x, y, z), de rayon r et de couleur donnée.
3. Représenter le Soleil, Mercure, Venus, la Terre, la Lune, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune ainsi que leur trajectoires. Que remarque-t-on ?
4. A partir de maintenant on représentera des distances au Soleil modifiées en prenant pour la variable ua la valeur 100000. Représenter Mercure, Venus, la Terre et Mars, ainsi que leurs trajectoires.
5. Représenter la Terre ainsi que la Lune et sa trajectoire.

Problème 8. On transforme une figure formée de segments par le procédé suivant, et ce pour chaque segment de la figure :



Le flocon de Van Koch est la limite lorsque le nombre d'étapes tend vers l'infini. On cherche à tracer les premières étapes de calcul.

1. Ecrire une procédure qui donne l'affixe du point de coordonnées (x, y).
2. Ecrire une procédure qui, étant donnée une liste d'affixes, renvoie la liste des coordonnées des points correspondants (sous la forme de liste à deux éléments $[x, y]$).
3. Ecrire une procédure rotation qui, étant donnés a, b et θ, donne l'affixe de l'image du point d'affixe b dans la rotation de centre le point d'affixe a et d'angle θ.
4. Ecrire une procédure qui, étant donnés deux affixes a et b, donne l'affixe des trois points rajoutés sur la figure transformée.

5. Ecrire une procédure qui, étant donnée la liste des affixes des points des extrémités des segments d'une figure, donne la liste des affixes des points des extrémités des segments de la figure transformée.
6. Ecrire une procédure qui trace la $n$ième transformée d'une figure donnée. On donnera la figure sous forme de liste, et on utilisera les options «scaling=constrained» et «axes=none».
7. Appliquer la procédure précédente au calcul de la 5ème transformée d'un triangle équilatéral.

Problème 9. On dit qu'un nombre entier n est un nombre *palyndrôme* si on lit n aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche dans son écriture en base 10 (par exemple : 8, 11, 6841486, ...). On se propose de reconnaître de tels nombres et d'étudier certaines de leurs propriétés.

1. Ecrire une procédure qui, étant donné un nombre n dans $\mathbb{N}$, renvoie la liste de ses chiffres en base 10.
2. Ecrire une procédure qui teste si un nombre est un palyndrôme.
3. Existe-t-il des nombres premiers palyndrômes ? Ecrire une procédure qui détermine le $i$ème nombre premier palyndrôme. Quel est le 191ème nombre premier palyndrôme ? Donner la liste des 50 premiers nombres premiers palyndrômes.
4. On considère qu'un nombre est reflet vertical de lui-même (dans un miroir horizontal) s'il ne s'écrit qu'avec des chiffres 0, 1, 3 et 8. Quel est le 331ème nombre premier reflet vertical de lui-même ? Donner la liste des 50 premiers nombres premiers reflets verticaux d'eux-mêmes.
5. Quel est le 20ème nombre premier à la fois palyndrôme et reflet vertical de lui-même ?